

Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe.

[Per] : *Cous d'algèbre*, Daniel Perrin[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

I Partie A - Des rappels succincts

| Déf 1 (Sous-groupe engendré) :

| Déf 2 (Partie génératrice) :

Rem 3 : Permet d'étendre des propriétés au groupe entier.

| Ex 4 : Groupe des décimaux.

| Prop 5 : Un morphisme de groupe est déterminé par les images d'une partie génératrice.

II Partie B - Les groupes monogènes [Rom] [Per] [Szp]

| Déf 6 (Groupe monogène) :

Rem 7 : Un groupe monogène est abélien.

| Ex 8 : Racines de l'unité.

| Ex 9 : $n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

| Prop 10 (Classification des groupes monogènes et cycliques) :

Thm 11 (Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) :

| Déf 12 (Indicatrice d'Euler) :

| Ex 13 : Inversibles de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ | Prop 14 : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.App 15 : Tout sous-groupe fini de $K^\times$ est cyclique

Thm 16 (Sous-groupes d'un groupe cyclique) :

Ex 17 : Sous-groupes de $\mathbb{U}_n$.| Dév 18 (Condition de cyclicité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$) :

III Partie D - Les permutations [Szp] [Per] [Rom]

| Déf 19 (Cycles) :

| Ex 20 : Exemple de cycle.

Thm 21 (Décomposition en cycles à support disjoints) :

| Ex 22 : $\sigma = (1\ 4\ 3\ 8\ 7)(1\ 6) = (1\ 4\ 3\ 8\ 7)(5)(2\ 6)$.

App 23 : Ordre d'une permutation.

App 24 : Classes de conjugaison de permutations.

| Prop 25 : Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$. On peut se restreindre aux transpositions du type $(i\ i+1)$ ou $(1\ i)$.App 26 : Les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$.| Prop 27 : Les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.Thm 28 (Simplicité de $\mathfrak{A}_n$) :

App 29 (Automorphismes intérieurs) :

IV Partie C - Chez les matrices [Rom][Per][Szp]

IV.1 Pivot de Gauss

| Déf 30 (Matrices de transvection, dilatation) :

Thm 31 (Pivot de Gauss) :

| Cor 32 : Les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.App 33 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.| Prop 34 : Si $n \geq 3$, les transvections sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.App 35 : Si $n \geq 3$, $D(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = D(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

IV.2 Groupe orthogonal

■ Déf 36 (Groupe orthogonal) :

■ Déf 37 (Réflexion, renversement) :

■ Ex 38 : Réflexion et renversement matriciels en dim 3.

■ Thm 39 (Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$) :

■ Prop 40 : Les renversements sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.

App 41 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

IV.3 Application à la géométrie

■ Déf 42 (Groupe modulaire) :

■ Dév 43 (Action sur $\mathbb{H}$) :

■ Dév 44 (Générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$) :

App 45 (Pavage de $\mathbb{H}$) :